Lycée secondaire	Fiche de cours	Prof : Selmi.Ali
Mareth	Thème : Fonctions réciproques	4ième Math

I- Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, si pour tout y de f (I) , il existe une unique réel x de I tel que f (x) = y alors f est une bijection de I sur f (I)

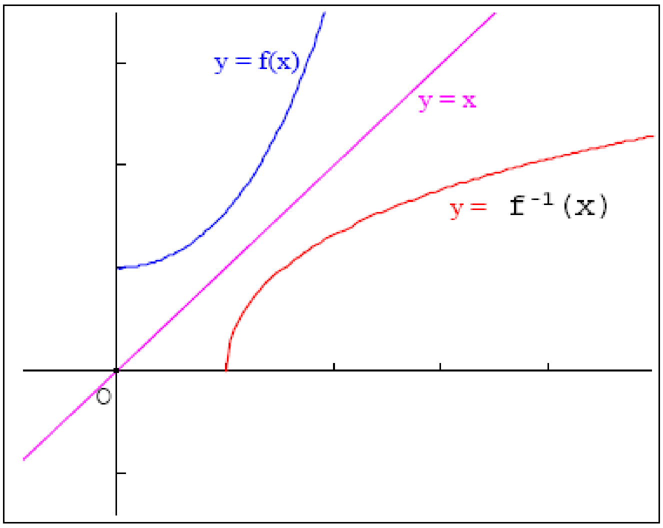
Théorème :

Si f continue strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur f (I).

* On note f^{-1} la fonction réciproque de f
* f^{-1} est définie sur f (I)
*Pour tout y ∈ I et tout x de f (I) : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

Représentation graphique de f^{-1} :

Les représentations graphiques d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$ dans un repère orthonormé.



II- Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone :

1) Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f^{-1} est continue et a la même sens de variation que f sur f (I)

2) Soit f est une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I alors si pour tout x de I ; $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur f (I) et pour tout x de f (I) on a : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

III- Fonction : $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ ou $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}_+$

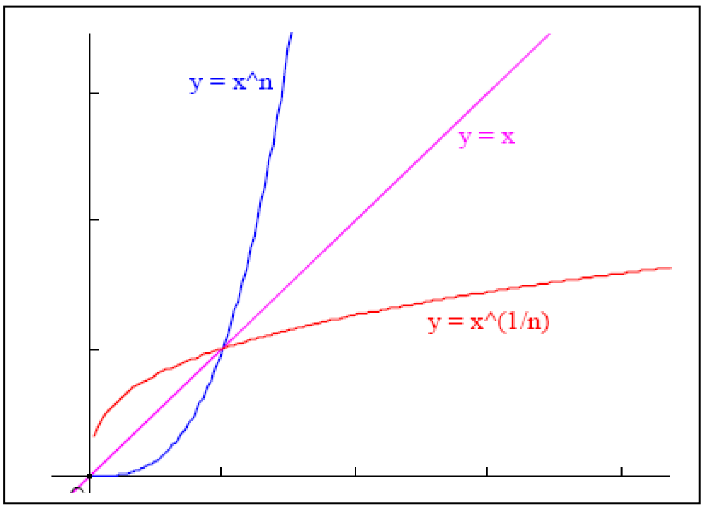
La fonction : $x \longmapsto x^n$, est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ sa fonction réciproque s'appelle fonction racine nième définie par :

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad n \geq 2$$
$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

* f^{-1} est croissante sur $\mathbb{R}_+$
* Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$:

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$



Propriétés :
Pour tout entiers n et p ((n ⩾ 2 et p ⩾ 2) et tous réels positif x et y on a :

* $\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
* $\sqrt[n]{xy} = \left(\sqrt[n]{x}\right)\left(\sqrt[n]{y}\right)$
* $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n.p]{x^p}$
* $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n.p]{x}$
* $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ou $b \neq 0$

Théorème :

Pour tout entier n ⩾ 2 , la fonction : $f : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

- est continue sur $\left[0,+\infty\right[$
- est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et pour tout x > 0

$$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \; ; x > 0.$$

IV- <u>Fonction</u> :$x \longmapsto \sqrt[n]{U(x)}$

Soit U une fonction dérivable et positive sur intervalle I la fonction $f : x \longmapsto \sqrt[n]{U(x)}$, n ⩾ 2 est continue sur I et dérivable en tout x de I tel que U(x) ≠ 0.

Pour tout x ∈ I tel que U (x) > 0 : $f'(x) = \dfrac{U'(x)}{n\sqrt[n]{U(x)^{n-1}}}$.

